Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego

1. Pojęcia ogólne

Definicja 1. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu drugiego* nazywamy równanie

$$F\big(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x)\big)=0\,, \qquad (1)$$

gdzie $y(x)$ jest funkcją niewiadomą, $y'(x)\equiv\dfrac{dy}{dx}$ jest pochodną funkcji $y(x)$ oraz $y''(x)=\big(y'(x)\big)'$ jest pochodną rzędu drugiego (drugą pochodną) funkcji $y(x)$.

Przypomnimy, że drugą pochodną również można zapisać w postaci

$$y''(x)\equiv\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}\,.$$

Definicja 2. Funkcję $\varphi: X\to\mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalną na przedziale X nazywamy *rozwiązaniem równania* (1), jeżeli po podstawieniu do równania (1) zamienia go w tożsamość

$$F\big(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x)\big)\equiv 0\,.$$

Definicja 3. Funkcja $y=\varphi(x, C_1, C_2)$, gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi, nazywa się *rozwiązaniem ogólnym równania* (1), jeżeli dla każdej określonej wartości parametrów C_1 i C_2 funkcja $y=\varphi(x)$ jest rozwiązaniem równania (1).

Definicja 4. Równanie (1) z warunkami

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1, \qquad (2)$$

gdzie $x_0\in X$, $y_0\in\mathbb{R}$ i $y_1\in\mathbb{R}$ są danymi liczby, nazywamy *zagadnieniem początkowym* lub *zagadnieniem Cauchy'ego.*

Liczby x_0, y_0 i y_1 nazywamy *danymi początkowymi.*

Definicja 5. Rozwiązanie równania (1) postaci $y=\varphi(x)$, które spełnia warunki (2) nazywamy *rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego* dla równania (1).

2. Równania różniczkowe rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego

Równanie postaci

$$F(x,\ y'(x),\ y''(x)) = 0\,, \tag{3}$$

gdzie zmienna y nie występuje w sposób wyraźny, sprowadza się do równania rzędu pierwszego postaci

$$F(x,\ p(x),\ p'(x)) = 0\,,$$

gdzie

$$p(x) = y'(x)\,.$$

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$2xy'' = y'\,. \tag{4}$$

Rozwiązanie. Równanie (4) jest równaniem postaci (3). Więc stosujemy podstawienie

$$p = y'\,.$$

Wtedy otrzymamy

$$2xp' = p\,,$$

czyli

$$2x\frac{dp}{dx} = p\,.$$

Rozdzielając zmienne mamy

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{2x}$$

i całkując obustronnie dostajemy

$$\ln|p| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|C_1|\,,$$

gdzie C_1 jest dowolną stałą całkowania. Tak więc mamy

$$p = C_1\sqrt{x}\,.$$

Zatem wracając do zmiennej y otrzymamy jeszcze jedno równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych postaci

$$\frac{dy}{dx} = C_1\sqrt{x}\,.$$

Całkując obustronnie mamy

$$\int dy = C_1 \int \sqrt{x} dx .$$

Stąd rozwiązanie ogólne równania (4) ma postać

$$y = \frac{2}{3} C_1 x \sqrt{x} + C_2 ,$$

gdzie C_2 jest również dowolną stałą całkowania.

Zauważmy, że jeżeli równanie (3) ma postać

$$F(x,\ y''(x)) = 0 , \tag{5}$$

to w niektórych przypadkach skuteczniejszym jest podstawienie

$$p = y'' .$$

Załóżmy, że równanie (5) można rozwiązać względem x:

$$x = f(y'') .$$

Wtedy równanie (5) ma postać

$$x = f(p) .$$

Stąd

$$dx = f'(p) dp .$$

Ponieważ

$$\frac{d}{dx}\left(y'\right) = y'' = p ,$$

więc mamy

$$d(y') = p dx = p f'(p) dp .$$

Zatem całkując obustronnie otrzymamy

$$y' = \int p f'(p) dp + C_1 , \tag{6}$$

gdzie C_1 jest dowolną stałą całkowania.

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$\left(y''\right)^3 - 2y'' - x = 0 . \tag{7}$$

Rozwiązanie. Zauważmy na początku, że dla tego równania podstawienie $p = y'$ i $p' = y''$ nie jest dobre, ponieważ otrzymamy bardzo skomplikowane równanie rzędu pierwszego. Natomiast łatwo zauważyć, że

$$x = \left(y''\right)^3 - 2y'' .$$

Wobec tego skorzystamy z podstawienia

$$p = y''.$$

Zatem mamy

$$x = p^3 - 2p \quad \text{czyli} \quad f(p) = p^3 - 2p.$$

Podstawiając do wzoru (6) dostajemy równanie rzędu pierwszego postaci

$$y' = \int p(3p^2 + 2)dp + C_1 = \frac{3}{4}p^4 + p^2 + C_1,$$

czyli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}p^4 + p^2 + C_1.$$

Rozdzielając zmienne i korzystając z równości

$$dx = (3p^2 - 2)dp$$

otrzymamy równanie o zmiennych rozdzielonych postaci

$$dy = \left(\frac{3}{4}p^4 + p^2 + C_1\right)\left(3p^2 - 2\right)dp.$$

Całkując obustronnie otrzymamy

$$y = \frac{9}{28}p^7 + \frac{3}{10}p^5 + \frac{3C_1 - 2}{3}p^3 - 2C_1 p + C_2,$$

gdzie C_1, C_2 są dowolnymi stałymi.

Zatem rozwiązanie ogólne równania (7) dane jest w postaci parametrycznej wzorem

$$x = p^3 - 2p,$$
$$y = \frac{9}{28}p^7 + \frac{3}{10}p^5 + \frac{3C_1 - 2}{3}p^3 - 2C_1 p + C_2.$$

Rozważmy równanie postaci

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{8}$$

gdzie zmienna x nie występuje w sposób wyraźny. Stosując podstawienie

$$y' = u(y) \tag{9}$$

równanie (8) sprowadza się do równania rzędu pierwszego. Różniczkując równość (9) mamy

$$y'' = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u. \tag{10}$$

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$2yy'' = (y')^2 + 1 .$$

Rozwiązanie. Równanie jest równaniem typu (8). Więc korzystając ze wzorów (9) i (10) rozważane równanie można zapisać w postaci

$$2y\frac{du}{dy}u = u^2 + 1 .$$

Rozdzielając zmienne i całkując obustronnie otrzymamy

$$\int \frac{2udu}{u^2+1} = \int \frac{dy}{y} .$$

Stąd

$$\ln|u^2+1| = \ln|y| + \ln|C_1| .$$

Po prostych przekształceniach mamy rozwiązanie względem u postaci

$$u = \pm\sqrt{C_1 y - 1} .$$

Podstawiając do równania (9) mamy

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1} .$$

Wtedy rozdzielając zmienne i całkując po raz drugi otrzymamy

$$\pm\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx .$$

Zatem

$$\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2$$

lub

$$4(C_1 y - 1) = C_1^2 (x + C_2)^2 .$$

Tak więc szukanym rozwiązaniem ogólnym rozważanego równania jest funkcja postaci

$$y = \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2 + \frac{1}{C_1} ,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przykład 4. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} &4y''\sqrt{y}=1, \\ &y(0)=1, \quad y'(0)=1. \end{aligned} \tag{11}$$

Rozwiązanie. Rozważane w zagadnieniu równanie jest równaniem typu (8). Zatem możemy dokonać zmiany (10) i wtedy mamy

$$4u\frac{du}{dy}\sqrt{y}=1.$$

Rozdzielając zmienne i całkując obustronnie otrzymamy

$$4\int udu=\int\frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Zatem

$$2u^2=2\sqrt{y}+2C_1,$$

czyli

$$u=\pm\sqrt{\sqrt{y}+C_1}.$$

Wracając do zmiennej y otrzymamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\sqrt{y}+C_1}.$$

Wykorzystując teraz zadane warunki początkowe otrzymamy

$$1=\sqrt{1+C_1}.$$

Zatem $C_1=0$. Tak więc mamy równanie

$$\frac{dy}{dx}=y^{\frac{1}{4}},$$

czyli

$$y^{-\frac{1}{4}}dy=dx.$$

Całkując obustronnie otrzymamy

$$\int y^{-\frac{1}{4}}dy=\int dx,$$

$$\frac{4}{3}y^{\frac{3}{4}}=x+C_2.$$

Uwzględniając jeszcze raz dane początkowe otrzymamy

$$C_2=\frac{4}{3}.$$

Tak więc szukane rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (11) ma postać

$$y^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}x + 1$$

lub

$$y = \left(\frac{3}{4}x + 1\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać podane równania różniczkowe rzędu drugiego (lub zagadnienie Cauchy'ego) sprowadzając je do równań rzędu pierwszego:

1. $y'' = 1 - (y')^2$;

2. $y'' = 1 + (y')^2$;

3. $x^2 y'' = (y')^2$;

4. $y^3 y'' = 1$;

5. $y''' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

6. $y'' = 2yy'$;

7. $y''(e^x + 1) + y' = 0$;

8. $yy'' - (y')^2 = 0$;

9. $2xy'y'' - (y')^2 = -1$;

10. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$;

11. $2yy'' = y^2 - (y')^2$;

12. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$;

13. $y'' = e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{2}$;

14. $yy'' - 2yy' \ln y = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;

15. $yy'' + 1 = (y')^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch